文章编号: 1009-1327 (2003) 03-0240-09

关于G-M成果研究的若干新动态II
——与G-M型空间相关的算子

钟怀杰[1], 程立新[2]
(1. 福建师范大学数学系, 福建 福州 350007)
(2. 厦门大学数学系, 福建 厦门 361005)

摘要: 结合自己的工作, 对Gowers-Maurey系列成果获Fields奖以来的研究的新动态作一综述. 该文是下篇, 主要讨论与G-M型空间相关的算子, 包括可通过G-M型空间分解的算子, G-M型空间上的算子理想与算子构成, G-M型空间上的算子谱理论等.

关键词: Banach空间; G-M型空间; 严格奇异算子; 严格余奇异算子
中图分类号: O177.2

0 引 言

在题为"G-M型空间的若干品种"的上篇[1], 我们从$H.I.$(遗传不可分解)空间出发, 讨论了G-M型空间的若干新品种. 其中包括有某种不可分解性质的一类: 诸如$Q.H.I.$(商遗传不可分解)空间, $I.$(不可分解)空间, $Q.I.$(商不可分解)空间, $H.F.D.$(遗传有限可分解)空间等; 也包括有某种不可合成性质的一类: 诸如I_C.(不可合成)空间, $Q.H.I_C$.(商遗传不可合成)空间等. 在本下篇, 我们综述与G-M型空间相关的算子研究成果, 全文包括三个内容: 1. 关于G-M型空间上的算子构成和算子理想; 2. 关于可通过G-M型空间分解的算子; 3. 关于G-M空间上的算子谱理论.

第1节首先对Gowers和Maurey在文献[2]所获结果: 证明他们所构造的第一例$H.I.$空间X_G, 其上全体算子的构成特别简单, 每个算子都可表为一个数乘算子与一个严格奇异算子的和, 即$B(X_G)=\{\lambda I+S:\lambda\in C,\ S\in S(X_G)\}$, 进行了简化证明和深化结果, 我们说明实际上对空间X_G而言, 其上严格奇异算子理想$S(X_G)$, 严格余奇异算子理想$S^C(X_G)$, 与黎斯算子类$R(X_G)$三者重合, 即$S(X_G)=S^C(X_G)=R(X_G)$. 进而说明对每个$Q.H.I.$空间X, 也都有$S(X)=S^C(X)=R(X)$. 其次, 说明对文献[1]中所述的各种G-M型空间的每一个X, 都有类似的简单算子构成$B(X)=\{\lambda I+A\}$, 其中$\lambda\in C$, A是严格奇异算子理想或严格余奇异算子理想. 这部分结果不仅是对文献[3]、[4]和[5]工作的较为全面的总结, 而且有所纠偏、改进和推广、深化.

第2节我们主要评述Argyros S.A.和Felouzis V.在文献[6]首创算子可通过H.I.空间分解的研究成果. 我们强调这一研究工作的意义: 把空间与算子的互动作用反映出来了, 并指出可以定义广义H.I.空间理想, 进而研究由广义H.I.空间理想导出的广义算子理想.

第3节主要评述单个G-M型空间上算子谱理论的现有研究成果, 它们包括Ricker J.W.和Cheng Q.关于$H.I.$空间上全有界算子的工作[7-9]和Ferenczi关于$H.D_n$.空间上算子谱理论工作[10].

本文的讨论用到算子理论的一些如下基本概念和记号.

设X和Y是数域$\mathbf{D}$($\mathbf{D}$取复数域$\mathbf{C}$或实数域$\mathbf{R}$)上的无限维的Banach空间, $B(X,Y)$表示由

收稿日期: 2001-05-16
基金项目: 国家自然科学基金(10171014, 10071063)

X 到 Y 的有界线性算子的全体, 当 $X = Y$ 时, $B(X, X)$ 简记为 $B(X)$. 分别用 $R(X)$、$S(X)$、$S^C(X)$、$K(X)$ 和 $F(X)$ 表示 $B(X)$ 中的黎斯算子、严格奇异算子、严格余奇异算子、紧算子和有限秩算子的集合.

黎斯算子 $T \in R(X)$ 的等价定义很多, 通俗地说是指 T 具有和紧算子一样谱结构的算子; T 的每一非零谱点都是孤立、有限代数重的特征值. 因而黎斯算子 T 的谱 $\sigma(T)$ 或者是有限集(特别在 $T \in F(X)$ 或 T 是拟幂零算子时), 或者是以零为唯一聚点的可数集. 黎斯算子另一个常用的特征是: 对任一数 $\lambda \neq 0$, $(T - \lambda I)$ 都是指标 $i(T - \lambda I) := \dim \mathrm{Ker}(T - \lambda I) - \mathrm{codim}\ I_m(T - \lambda I) = 0$ 的 Fredholm 算子. 其中算子 T 的零空间 $\ker(T) := \{x \in X : Tx = 0\}$, T 的值域 $I_m(T) := \{y \in X$: 存在 $x \in X$, 使得 $Tx = y\}$.

严格奇异算子类 $S(X, Y) := \{T \in B(X, Y)$: 在每一无限维子空间 $Z \subset X$ 上的限制 $T|_Z$ 都不是同构嵌入$\}$.

严格余奇异算子类 $S^C(X, Y) := T \in B(X, Y)$: 对任一无限维的商映射 $Q: Y \to Z$, 复合算子 $QT: X \to Z$ 都不是满射$\}$. 各类算子间有如下基本关系

$$B(X) \supset R(X) \supset \begin{matrix} S(X) \\ S^C(X) \end{matrix} \supset K(X) \supset F(X)$$

其间各包含关系一般都是真包含. 以上概念与关系见于文献[11]、[12]和[13]等.

还需要(半) Fredholm 算子的几个记号:

$B(X, Y)$ 中 Fredholm 算子的全体 $\Phi(X, Y) := \{T \in B(X, Y): I_m(T)$ 闭, $\dim \mathrm{Ker}(T) < \infty$, $\mathrm{codim}\ I_m(T) < \infty\}$.

$\Phi_0(X, Y) := \{T \in \Phi(X, Y): i(T) = \dim \mathrm{Ker}(T) - \mathrm{codim}\ I_m(T) = 0\}$

$\Phi_+(X, Y) := \{T \in B(X, Y): I_m(T)$ 闭, $\dim \mathrm{Ker}(T) < \infty\}$.

$\Phi_-(X, Y) := \{T \in B(X, Y): I_m(T)$ 闭, $\mathrm{codim}\ I_m(T) < \infty\}$,

当 $X = Y$ 时, $\Phi(X, Y)$ 简记为 $\Phi(X)$, 余同此记.

1　关于 G-M 型空间上的算子构成

研究空间结构与算子性质之间的联系, 是泛函分析的重要课题. 人们一般都认为 G-M 所造第一例 $H.I.$ 空间 X_G, 是为了否定解决无条件基序列问题. 实际上, Gowers 在 94 'ICM(苏黎世) 上的报告, 突出 Banach 代数 $B(X_G)$ 有特别简单构成 $B(X_G) = \{\lambda I + S\}$, 其中 λ 是复或实数, S 是某个严格奇异算子. 他们把自己的结果与如下著名的

Pisier 问题　是否存在一个 Banach X, 使 $B(X) = \{\lambda I + K\}$, 其中 λ 是复或实数, K 是某个紧算子, 即 Calkin 代数 $C(X) := B(X)/K(x)$ 与(复或实)数域同构, 是一维的?

联系起来, 至今为止, G-M 结果还是对 Pisier 问题正面回答的最佳逼近.

于是一段时间里, 人们很希望进一步搞清楚, 对第一例的 $H.I.$ 空间 X_G, 是否实际上已有 $S(X_G) = K(X_G)$? 或者更一般地, 每个 $H.I.$ 空间 X, 都是对 Pisier 问题的肯定回答 $B(X) = \{\lambda I + K\}$ 吗(见文献[5]的问题 2 和问题 3)? 尽管对前一个问题至今尚属 Open, 但 A-F 在文献[6]否定回答了第二个问题, 说明存在一个 $H.I.$ 空间 X_{AF}, 其上有"很多"严格奇异而非紧的算子.

由于众所周知, 紧算子都有(非平凡的) 不变子空间, 故 Pisier 问题如果能肯定解决, 一个不变子空间问题就可以肯定解决: 凡 $B(X) = \{\lambda I + K\}$ 的空间 X, 其上每个算子都有不变子空间. 于是, 在 Pelczynski 的建议下, Read C. J. 又在文献[12]研究了严格奇异算子的不变子空间问题.

本文在这方面的工作, 首先, 深化 G-M 的已有结果, 说明复 $H.I.$ 空间上不仅有 $B(X) = \{\lambda I + S\}$ 这种简单构成, 而且黎斯算子类 $R(X) = S(X)$ 成为最大算子理想. 其次, 把 G-M 关于 $H.I.$ 空间上的算子构成结果, 扩大到迄今为止, 我们所知的各种 G-M 型(未必限于 $H.I.$) 空间上, 只不过有时候以严格余奇异算子理想 $S^C(X)$ 代替严格奇异算子理想.

为简明起见, 此后凡空间都是指无限维的 Banach 空间, 凡子空间都是指无限维的闭子空间.

定义 1.1 空间 X 的两个子空间 M 和 N 称为是互相垂直的, 记为 $(M\perp N)\subset X$, 如果 $M\cap N=\{0\}$ 且 $M+N\coloneqq\{x+y: x\in M, y\in N\}$ 是 X 中的闭子空间.

定义 1.2 称空间 X 是可由两个子空间 M 和 N 合成的, 记为 $M\vee N=X$, 如果 $M+N=X$, 且 M 与 N 的亏维都是无限的, 即 $\operatorname{codim} M\coloneqq\dim(X/M)=\infty$ 且 $\operatorname{codim} N=\infty$.

如下两个引理是后面讨论中常用的基本工具, 其证明见于文献[4].

引理 1.1 设 M 和 N 是空间 X 的两个子空间, 则如下的各陈述是彼此等价的.

(a) $(M\perp N)\subset X$;

(b) 存在常数 $c>0$, 使得 $\|x+y\|\geq c\|x\|$ 对一切 $x\in M, y\in N$ 成立;

(c) 存在常数 $c>0$, 使得 $\delta(M,N)\coloneqq\inf\{\|x-y\|: \|x\|=\|y\|=1, x\in M, y\in N\}\geq c$;

(d) $M^{\perp}\vee N^{\perp}=X^*$, 其中 M 的上零化子 $M^{\perp}\coloneqq\{f\in X^*: 对每一 x\in M, f(x)=0\}$.

引理 1.2 对于空间 X 的各有限亏维的两个子空间 M 和 N, 如下各陈述是彼此等价的:

(a) $M\vee N=X$;

(b) $(M^{\perp}\perp N^{\perp})\subset X^*$.

引理 1.3[4] 设 X 和 Y 是两个(实或复的) Banach 空间, 如果 $T\notin\Phi_+(X,Y)$ 且 $T\notin S(X,Y)$, 则 X 中有两个互相垂直的子空间.

我们注意到虽然下面引理 1.5 在文献[3]、[4]等给出过, 但文献[4]的证明却有失误: 一般说来共轭空间 X^* 中的一个闭子空间 M, 其下零化子 ${}^{\perp}M\coloneqq\{x\in X: 对每一 f\in M, f(x)=0\}$ 的上零化子 $({}^{\perp}M)^{\perp}=M$ 的弱* 拓扑闭包 $\neq M$. 为此, 我们用如下引理 1.4 为改进证明作准备. 引理 1.4 与[14]中的命题2.c.4有一定类似, 但这里讨论的是共轭空间, 证明难度与技巧都有区别.

引理 1.4 设 $T\in B(X,Y)$, 如果 $T^*\notin\Phi_+(Y^*,X^*)$, 则对任一 $\epsilon>0$, 存在一个弱* 闭的(无限维)子空间 $N\subset Y^*$, 使得算子 T^* 在 N 上的限制 $T^*|_N$ 是紧算子, 且 $\|T^*|_N\|\leq\epsilon$.

证 我们用归纳法构造出两个双直交列 $\{y_n\}\subset Y$ 和 $\{y_n^*\}\subset Y^*$ 使得对一切 $i,j=1,2,\cdots$

$$y_j^*(y_i)=\delta_{ij},\quad \|y_i^*\|=1,\quad \|y_i\|\leq 2^{2k-1},\quad \|T^*y_i^*\|<2^{-3k}\cdot\epsilon$$

y_1 与 y_1^* 的存在由 $T^*\notin\Phi_+(Y^*,X^*)$, 故 T^* 在单位球面 $S(Y^*)$ 是下无界的. 假定符合要求的 $y_1,\cdots,y_k$ 和 $y_1^*,\cdots,y_k^*$ 已经造出. 令 $Z_k=(\mathrm{Span}\{y_1,\cdots,y_k\})^{\perp}\subset Y^*$, 由于 $T^*\notin\Phi_+^*$, 且 Z_k 的亏维是有限的, T^* 在单位球面 $S(Z_k)$ 仍是下无界的, 于是存在一个 $y_{k+1}^*\in Z_{k+1}$ 使得 $\|y_{k+1}^*\|=1$ 且 $\|T^*y_{k+1}^*\|\leq 2^{-3(k+1)}\cdot\epsilon$, 再取一个 $g_{k+1}\in Y$, 使得 $\|g_{k+1}\|<2$ 且 $y_{k+1}^*(g_{k+1})=1$.

令

$$y_{k+1}=g_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}y_i^*(g_{k+1})y_i$$

显然, $y_i^*(y_j)=\delta_{ij}$, 对 $i,j=1,2,\cdots,k+1$, 并且

$$\|y_{k+1}\|\leq\|g_{k+1}\|\left(1+\sum_{i=1}^{k}\|y_i^*\|\cdot\|y_i\|\right)$$

$$\leq 2\left(1+\sum_{i=1}^{k}2^{2i-1}\right)\leq 2^{2k+1}=2^{2(k+1)-1}$$

现在定义一个算子 $A\in B(Y^*,X^*)$ 为

$$Ay^*=\sum_{k=1}^{\infty}y^*(y_k)T^*y_k^*,\qquad 对每一 y^*\in Y^*$$

不等式 $\|T^*y_k^*\|\leq 2^{-3k}\cdot\epsilon$ 和 $\|y_k\|\leq 2^{2k-1}$ 蕴涵了 A 是一个有限秩算子列的极限故 A 是紧算了且 $\|A\|<\epsilon$.

进一步, 我们如果令 $B\in B(X,Y)$ 为

$$Bx=\sum_{k=1}^{\infty}T^*y_k^*(x)y_k,\qquad 对每一 x\in X$$

显然有 $B^* = A$.

于是 $T^* - A = (T - B)^*$ 是一个共轭算子, 故它在 Y^* 的范数拓扑和在 Y^* 的弱* 拓扑下都是连续的, 从而 $T^* - A$ 的零空间 $Z = \mathrm{Ker}(T^* - A)$ 是 Y^* 中的弱* 闭子空间, 显然对每个 k, $y_k \in Z$, 故 Z 是无限维的, 最后由于在 Z 上 $T^* = A$, 故 T^* 在 Z 上是紧的, 且 $\| T^* |_Z \| = \| A \| < \epsilon$, 引理证毕.

现在我们给出经过改正后的如下引理 1.5 的证明.

引理 **1.5**[4]　设 X 和 Y 是两个 Banach 空间, $T \in B(X, Y)$, 如果 $T \notin \Phi_-(X, Y)$ 且 $T \notin S^C(X, Y)$, 则 Y 是可合成的.

证　由于 $T \notin S^C(X, Y)$, 就有一个无限维的商映射 $Q_M: Y \to Y/M$, 使得 $Q_M T: X \to Y/M$ 是满射. 那么考虑 $(Q_M T)^* = T^* Q_M^*: (Y/M)^* = M^{\circ} \hookrightarrow X^*$, 是一个内射, 就应有 $c > 0$, 使得

$$\| T^* y^* \| \geq c \| y^* \|, \text{ 对一切 } y^* \in M^{\circ} \text{成立}$$

又由于 $T \notin \Phi_-(X, Y)$, 等价地, $T^* \notin \Phi_+(Y^*, X^*)$, 就由上面的引理 1.4, 存在一个无限维的弱* 闭子空间 $N \subset Y^*$, 使得 $\| T^* y^* \| \leq \frac{c}{2} \| y^* \|$, 对一切 $y^* \in N$ 成立.

至此, 与引理 1.3 的证明类似, 我们已经得到了 Y^* 中的两个子空间 $(M^{\circ} \perp N) \subset Y^*$. 再定义 N 的下零化子 $N = {}^{\perp}N$, 那么 $N \doteq [{}^{\perp}N]^{\circ} \doteq N$ 的弱* 闭包 $= N'$

现在应用引理 1.2, 就可由 $(M^{\circ} \perp N) \subset Y^*$, 得出 $M \vee N = Y$, (验证 M 和 N 的亏维无限从略) 证毕.

有了以上准备, 我们就得出比 G-M 关于算子构成和算子理想更深刻的如下系列结果.

定理 **1.6**　设 X 是一个复 $H.I.$ 空间, 则

1° $B(X) = \{\lambda I + S: \lambda \in C, S \in S(X)\}$.

2° 空间 X 上黎斯算子类 $R(X) = S(X)$, 故 $R(X)$ 成为 Banach 代数 $B(X)$ 中最大(非平凡的) 算子理想.

证　1° 应用复空间上算子谱理论的一个基本事实(例如, 见于文献[9]): 对每一算子 $T \in B(X)$, 其左本性谱. $\sigma_+(T) \doteq \{\lambda \in C: (T - \lambda I) \notin \Phi_+(X)\}$ 非空, 故存在一个 $\lambda \in \sigma_+(T)$. 现在 $(T - \lambda I) \notin \Phi_+(X)$, 由于 X 是 $H.I.$ 的, 应用引理 1.3, 必 $(T - \lambda I) \in S(X)$, 故 $T = \lambda I + S$, 对某一 $S \in S(X)$.

2° 为证 $R(X) = S(X)$, 如引言所述, 只需证明 $R(X) \subset S(X)$. 注意到当 $T \in R(X)$ 时 $0 \in \sigma_+(T)$, 因而 $T \notin \Phi_+(X)$. 又由引理 1.3, $T \in S(X)$. 其余证明(可见于文献[4]) 从略.

定理 **1.7**　如果 X 是一个复的不可合成(I_c) 或者等价地, 商不可合成($Q.I_c$) Banach 空间, 则

1° $B(X) = \{\lambda I + S: \lambda \in \mathbf{C}, S \in S^C(X)\}$.

2° X 上黎斯算子类 $R(X) = S^C(X)$, 从而 $R(X)$ 成为 Banach 代数 $B(X)$ 中最大(非平凡的) 算子理想.

G-M 型空间的一个新品种 I_c(或 $Q.I_c$) 的定义见[1] 的定义 2.4 和定义 2.5.

定理 1.7 的证明与定理 1.6 的证明几乎是对偶平行式的, 只是应用引理 1.5, 故从略.

定理 **1.8**　如果 X 是一个复的商不可分解($Q.I.$, 其定义见[1] 的定义 2.3) 的 Banach 空间, 则

1° $B(X) = \{\lambda I + S: \lambda \in \mathbf{C}, S \in S^C(X)\}$.

2° X 上黎斯算子类 $R(X) = S^C(X)$, 从而黎斯算子全体成为 Banach 代数 $B(X)$ 中最大(非平凡的) 算子理想.

证　1° 对任一 $T \in B(X)$, 由算子谱理论基本知识, 算子 T 的右本性谱 $\sigma_-(T) \doteq \{\lambda \in \mathbf{C}: (T - \lambda I) \notin \Phi_-(X)\}$ 非空, 故可取一 λ, 使 $(T - \lambda) \notin \Phi_-(X)$. 现在我们要说明这时 $(T - \lambda I) \in$

$S^C(X)$. 若不然, 由引理 1.5 先有 X 中两个亏维都是无限的子空间 M 和 N, 它们合成了 X, 即 $M+N=X$. 取 $X_0=M\cap N$, 则 X_0 的亏维更是无限的, 现在无限维的商空间 $X/X_0=(M/X_0)+(N/X_0)$ 是直和分解, 即它们是互相垂直的子空间. $((M/X_0)\perp(N/X_0)\subset X/X_0$, 此与 $X\in Q.I.$ 矛盾.

2° 与前述定理类似, 证明从略.

由于[1] 中已说明商遗传不可分解($Q.H.I.$, 定义见文献[1] 的定义 2.2) 的 Banach 空间既是$H.I.$ 空间, 又是 $Q.I.$ 空间, 故综合定理 1.6 和定理 1.8, 立即可得如下:

定理 1.9 设 X 是一个复的 $Q.H.I.$ 空间, 则

1° X 上两种算子理想 $S(X)$ 和 $S^C(X)$ 是重合的: $S(X)=S^C(X)$.

2° X 上黎斯算子类 $R(X)=S(X)=S^C(X)$ 成为 Banach 代数 $B(X)$ 中最大(非平凡的) 的算子理想.

推论 1.10 G-M 构造的一第一例 $H.I.$ 空间 X_G 是 $Q.H.I.$ 空间(见文献[1] 或[15]), 故 $R(X_G)=S^C(X_G)=S(X_G)$.

推论 1.10 的结果对进一步研究 $B(X_G)$ 的构成, 进而考虑 X_G 是否为 Pisier 问题所要求的 $K(X_G)=S(X_G)$ 的空间, 显然是有益的.

定理 1.11 设 X 是一个复的 $H.I_C$ 空间, 则

1° $B(X)=\{\lambda I+S: \lambda\in\mathbf{C},\ S\in S(X)\}$

2° X 上黎斯算子类 $R(X)=S(X)=S^C(X)$ 成为 Banach 代数 $B(X)$ 中最大(非平凡的) 的算子理想.

证 1° 对任给的 $T\in B(X)$, 算子 T 的左本性谱 $\sigma_+(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}: (T-\lambda I)\notin\Phi_+(X)\}$ 非空, 故存在 $\lambda\in\mathbf{C}$, 使$(T-\lambda)\notin\Phi_+(X)$, 进而证明$(T-\lambda)\in S(X)$. 从而有 $S\in S(X)$, 使得 $T-\lambda I=S$ 即 $T=\lambda I+S$. 若不然, 由引理 1.3, 存在 X 中的两个互相垂直的子空间$(M\perp N)\subset X$. 这时令 $M+N=Y\subset X$, 则显然 X 有无限维子空间 $X\supset Y$, $M\vee N=Y$, 此与 $Y\in H.I_C$ 矛盾.

2° 与上述各定理的证明类似, 从已经证得的结果 $B(X)=\{\lambda I+S: \lambda\in\mathbf{C},\ S\in(X)\}$, 很容易推出$R(X)=S(X)$ 是$B(X)$ 中最大的算子理想.

又注意到 $H.I_C=Q..I_C$, 而 $X\in Q.H.I_C$ 蕴涵了 $X\in Q.I_{C\cdot}$, 现在应用上述的定理 1.7 于 X, 又有 $R(X)=S^C(X)$, 于是 $R(X)=S(X)=S^C(X)$, 证毕.

评注 1 a. 至此, 我们已经证明, 对文献[1] 中已经甄别出的各种 G-M 型空间: $H.I.$ 空间, $Q.H.I.$ 空间, $I_{C\cdot}(=Q.H_{C\cdot})$ 空间和 $Q.H.I_{C\cdot}(=H.I_{C\cdot})$ 空间等, 其上算子构成都特别简单: $B(X)=\{\lambda I+S: \lambda\in\mathbf{C},\ S\in P(X), P$ 是严格奇异算子理想或严格余奇异算子理想$\}$.

b. 上述简化或者推广 G-M 证明方法的一个重要途径是应用复空间上算子的本性谱非空这一事实, 对于实的 G-M 型空间, 就不能援引这一结果. 严格地说, 包括 $H.I.$ 空间在内, 实空间上相应结果并没有真正确立过, 尽管 G-M 在文献[2] 也讨论过实的 $H.I.$ 空间的许多类似性质. 例如, 他们说明实 $H.I.$ 空间不与其任一真子空间同构, 还讨论了实 $H.I.$ 空间复化后, 相应复化后的算子的构成, 等等. 关于实 $H.I.$ 空间上算子构成的目前最好的结果应是如下:

命题 1.12[10] 设 X 是一个实的 $H.I.$ 空间, 则 $\dim(B(X)/S(X))\leq 4$, 并且更准确地说, $B(X)/S(X)$ 同构于实数环 R, 复数环 C, 或者四元数体 H.

由此看来, 对于实 G-M 型空间, 尤其我们甄别出的 $Q.I.$, $Q.H.I_C$, $Q.I_C$ 实空间等, 其上算子构成也都值得进一步探讨, 预计借鉴于文献[10] 的方法, 应该也可以得到与命题 1.12 相应的一批结果. 当然, 就实 $H.I.$ 空间而言, 人们也不会满足于命题 1.12 这种定性而非确定量结果, 猜测对 G-M 所造第一例实的 $H.I.$ 空间 X_G, 也应有 $\dim(B(X_G)/S(X_G))=1$, 即 $B(X_G)=\{\lambda I+S:\lambda\in R, S\in S(X_G)\}$.

2　关于可通过 G-M 型空间分解的算子

定义 2.1[13]　设 $\mathscr{A}$ 表示作用于任何两个 Banach 空间之的算子的全体, $\mathscr{A}$ 中一个算子类 A 称为是广义算子理想, 如果满足如下条件:

1°　A 包括了所有的有限秩算子, 即对任何两个 Banach 空间 $X, Y, A \supset F(X, Y)$.

2°　对任一 Banach 空间 X, A 的一个分支 $A \cap B(X) \coloneqq A(X)$ 都是 $B(X)$ 中的算子理想.

3°　A 中作为算子的元素具有乘法吸收性: 当 $T \in A \cap B(X, Y) \coloneqq A(X, Y)$ 时, 对任给的算子 $Q \in B(Y, Z)$ 和 $R \in (W, X)$, 都有 $QTR \in A(W, Z)$.

定义 2.2[13]　设 $\mathscr{B}$ 表示(有限或无限维) Banach 空间的全体, $\mathscr{B}$ 中一个空间类 B 称为是广义空间理想, 如果满足如下条件:

1°　每个有限维空间属于 B.

2°　$X \in B, Y \in B$, 则乘积空间 $X \times Y \in B$.

3°　B 中每个空间的每个可补子空间属于 B.

4°　B 中的元素在相差一个同构下的仍属于 B.

命题 2.3[13]　1°　对给定的一个广义空间理想 B, $O_p(B) \coloneqq \{T \in B(X, Y)$: 存在 $Z \in B$, $R \in B(X, Z), Q \in B(Z, Y)$, 使得 $T = QR\}$ 是一个广义算子理想.

2°　对给定的一个广义算子理想 A, $S_p(A) \coloneqq \{X \in \mathscr{B}$ 恒等算子 $I_X \in A\}$ 是一个广义空间理想.

在空间理论中, 可通过某类空间分解的算子研究是一个重要问题, 它把空间性质和算子性质之间的内在联系反映了出来. 最有意思的一例是自反空间通过弱紧算子的刻画: 任一算子 $T \in B(X, Y)$ 弱紧的充要条件是 T 可以通过某一自反空间分解, 即 $WC = O_p(R)$, 这里 WC 表示弱紧算子理想, R 表示自反空间理想. 反之, 自反空间就是恒等算子是弱紧的一类空间, 即 $R = S_p(WC)$.

我们在文献[1]的 §2 提到由特殊的 G-M 型空间类 HD_n, 可以生成一个广义空间理想, $\chi \coloneqq \{$空间 X: 对某个非负整数 $n, X \in HD_n\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} HD_n$, 从而引发研究由 χ 导出的算子理想. $O_p(\chi)$ 等系列问题. 正是在这种背景下, 我们来评述如下 $A-F$ 在文献[6]所作的可通过 $H.I.$ 空间分解的算子的研究.

命题 2.4[6]　设 $T \in B(X, Y)$, 如果空间 X 的单位球 B_X 在 T 的作用下 $T(B_X)$ 是一个 α-细集, 则 T 可通过某个 $H.I.$ 空间分解.

空间 X 中一个有界对称的凸集 W 称为是一个细集(thin set), 如果对每个子空间 Z, 存在一个 $\epsilon > 0$, 使对每个实数 λ, B_Z 不包含在 $\lambda W + \epsilon B_X$ 中. 细集是 20 世纪 80 年代作为空间理论新引入的几何概念, 被用以研究算子通过某类空间分解问题. 文献[16]就是以细集为工具, 来研究通过遗传 l_p 空间分解的算子. Maurey B. 又通过改进, 用 α-细集概念代替细集, 并提供给 $A-F$, 成为文献[6]研究插值遗传不可分解空间的最新工具.

命题 2.5[6]　每个严格奇异算子 $T \in S(l_p)$, $1 \le p \le \infty$ 都可以通过 $H.I.$ 空间分解.

命题 2.6[6]　每个算子 $S \in B(l_p, l_q)$, $1 \le p \ne q \le \infty$, 都可以通过 $H.I.$ 空间分解.

评注 2　相应于我们甄别出的每一个 G-M 型空间的品种, 应该也有算子可通过它们分解的问题, 诸如:

a. 讨论由某种 G-M 型空间 B(B 取为 $Q.H.I.$, $Q.I.$ 或 $Q.H.I_C$, $Q.I_C$ 等) 是否为空间理想, 或如何生成空间理想.

b. 讨论由某种 G-M 型空间 B 导出的算子理想 $O_p(B)$.

3　G-M 型空间上算子的谱理论

全有界算子是 Banach 空间算子谱理论研究中的一种重要算子类型. 在 Sturm-Liouvile 理论, Fourier 分析与数论中的成功应用, 使它的研究至今很有活力[17].

定义 3.1[18] 设 X 是一个 Banach 空间, 称算子 $T\in B(X)$ 是全有界的, 如果存在一个有界闭区间 $J=[a,b]$ 和常数 K, 使得对每个复系数多项式 $p(x)$ 都成立.

$$\|p(T)\|\leq K\|p\|_J$$

其中多项式 p 在 J 上的范数 $\|p\|_J\doteq|p(b)|+\mathrm{Var}(p,J)$, $\mathrm{Var}(p,J)$ 表示 p 在 J 上的全变差.

在[18]的§16, 把全有界算子分为可分解型(包括可唯一分解型)、(A)型和(B)型等.

定义 3.2[18] 称 $T\in B(X)$ 是(B)型的全有界算子, 如果 T 是可分解的, 并且 T 的单位分解作为投影值函数 $E(\cdot)$ 使得 $E^*(\cdot)$ 满足: 1) $E^*(\cdot)$ 在强算子拓扑下右连续, 2) $E^*(\cdot)$ 在 R 的每一点有左侧极限.

对于自反的空间 X, 其上全有界算子是自动成为(B)型的(见文献[18]的定理 17.17), 并且与 Hilbert 空间算子理论中关于自共轭算子, 正规算子的谱理论相参照, 已经知道算子 T 为(B)型全有界的充分必要条件是存在一个投影谱族 $E(\cdot)$, 使得 $E(\cdot)$ 集结在 J, 且算子 T 有积分表示

$$T=\oint\lambda dE(\lambda)$$

Ricker J.W. 应该是第一个研究 $H.I.$ 空间上全有界算子谱理论者, 在[7]他给出了如下有趣的结果:

命题 3.3[7] $H.I.$ 空间上的每个(B)型全有界算子 T 有表示 $T=\lambda I+K$, 其中 K 是某个紧算子.

这个命题的意义显然: 就 $H.I.$ 空间上的(B)型全有界算子而言, Piesier 问题的回答是肯定的.

Riclker J.W. 还对 H.I. 空间上(B)型全有界算子的结构和谱性质作了相当完备的描述. Cheng Q.P. 在这一基础上深入, 在其博士学位论文[9]中进一步说明 Ricker J.W. 所获主要结果对一般全有界算子也都是成立的.

现在我转入关于遗传有限分解(HD_n)空间上算子谱理论的评述.

命题 3.4[10] Banach 空间 X 称为是基本的 HD_n 空间, 如果他是 n 个 $H.I.$ 空间的直和 $X=\oplus_{i=1}^n X_i$, 其中任意两个 X_i 和 X_j 或者是同构的, 或者完全不可比的(就是不含同构子空间).

命题 3.5[10] 设 $X=\oplus_{i=1}^n X_i$ 是一个基本的复的 $H.D_n$ 空间, 则每个算子 $T\in B(X)$ 可表示 $T=\sum_{i\simeq j}\lambda_{ij}p_{ij}+S$ 的形式, 其中 λ_{ij} 是复数, S 是一个严格奇异算子, p_{ij} 表示当 X_i 与 X_j 同构时($i\simeq j$), X 到 X_i 的自然投影 P_i 与由 X_i 到 X_j 的同构算子 α_{ij} 的乘积 $p_{ij}=\alpha_{ij}P_i$.

命题 3.6[10] 设 X 是一个复的 $H.D_n$ 空间, Y 是一个复的 $H.D_m$ 空间, 则 $\dim(B(X,Y)/S(X,Y)\leq mn$.

命题 3.7[10] 设 X 是一个复的 $H.D_n$ 空间, 那么

1) 每个算子 $T\in B(X)$ 的本性谱的点数 $|S(T)|\leq n$.

2) 每个 X 上的半 Fredholm 算子是指标为零的 Fredholm 算子.

3) X 不同构于其任一真子空间.

下面是我们继文献[10]之后的最近工作.

定理 3.8 设 X 是一个基本的复 $H.D_n$ 空间, 那么 $R(X)=S(X)$.

定理 3.9 设 X 是一个基本的复 $H.D_n$ 空间, 则 X 不同构于其任一真商空间.

我们建立起一个算子的广义延拓定理, 众所周知, 对于子空间上的线性连续泛函而言, Hahn-Banach 定理保证其可(保范)延拓. 但是对于一个子空间 Y⊂X 上的线性连续算子 T 而言, 一般说来 T 的延拓是难以实现的, 除非 Y 是 X 的可补子空间. 故而如下结果在一般 Banach

空间算子研究中是很有意义的.

定理 3.10 设 Y 是 Banach 空间 X 的一个子空间,算子 $T\in B(Y,Z)$. 那么存在一个 Banach 空间 W 以及算子 $T_1\in B(X,W)$,使得

1) 通过嵌入映射 j, Z 等距同构于 W 的一个子空间.

2) T_1 是 T 的延拓,即 $T_1|_Y=jT$.

3) X/Y 是 W/Z 等距同构.

证 不妨设 $\|T\|=1$(否则令 $T_0=T/\|T\|$),并令 $W=(X\oplus Z)/M$,其中 $M=\{(y,-Ty)|y\in Y\}$,它是乘积空间 $X\oplus Z$ 的一个子空间,由算子 T 导出.

定义算子 $j:Z\to W$ 为 $j(z)=[(0,z)]$,乘积空间 $X\oplus Z$ 中的元素 $(0,z)$ 按模以 M 后的等价类. 下证 j 是一个等距映射.

由定义 $\|[(0,z)]\|=\inf_{y\in Y}\{\|(0,z)+(y,-Ty)\|=\inf_{y\in Y}\{\|y,z-Ty\|\}=\inf_{y\in Y}\{\|y\|+\|z-Ty\|\}\le\|z\|$.

另一方面,对每一 $y\in T$, $\|y\|+\|z-Ty\|\ge\|Ty\|+\|z-Ty\|\ge\|z\|$,这又意味着 $\|[(0,z)]\|\ge\|z\|$, 于是 $\|[(0,z)]\|=\|z\|$.

现在定义一个算子 $T_1:X\to W$ 为 $T_1x=[(x,0)]$. 那么对任一 $y\in Y$, $T_1y=[(y,0)]=[(0,Ty)]=jTy$, 故 $T_1|_Y=jT$.

最后来验证 $X/Y\approx W/Z$. 为此定义 $Q([x])=[(x,0)]+j(Z)$, 易知 Q 是完全确定的. 并且一方面,

$$\begin{aligned}\|Q([x])\| &= \inf_{z\in Z}\left\{\inf_{y\in Y}\left\{\|(x+y,z-Ty)\|\right\}\right\}\\ &= \inf_{z\in Z,y\in Y}\{\|x+y\|+\|z-Ty\|\}\\ &\le \inf_{y\in Y}\{\|x+y\|\}=\|[x]\|\end{aligned}$$

另一方面,对所有 $y\in Y$, $z\in Z$, 都有 $\|x+y\|+\|z-Ty\|\ge\|x+y\|\ge\|[x]\|$,这说明 $\|Q([x])\|\ge\|[x]\|$,于是证明了 $\|Q([x])\|=\|[x]\|$,并且易知 Q 是一个满射,定理证毕.

应用这一广义的算子延拓定理,我们给出如下

定理 3.11 设 X 是一个 Banach 空间,那么如下论断是等价的:

1) X 是一个 $H.I.$ 空间.

2) 对任一 Banach 空间 Y 与每一算子 $T\in B(X,Y)$,只要有一个子空间 $X_0\subset X$, 使 $T|_{X_0}\in S(X_0,Y)$, 则 $T\in S(X,Y)$.

评注 3 a. 定理 3.10 本质上是受 Ferenczi 在文献[15]中构造 $H.I.$(但其共轭非 $H.I.$)空间 X_F 的方法启发的. X_F 本身就是一个乘积空间的商空间形式,我们在[1]简介过它.

b. 希望定理 3.10 和定理 3.11 对将来研究 $H.I.$ 空间 X_G 上算子是否对 Pisier 问题肯定回答提供一个思路:为证明 $S(X_G)=K(X_G)$,能否证明对每一 $T\in S(X_G)$,只要在一个无限维子空间 X_0 上的限制 $T|_{X_0}$ 是紧算子,则 $T\in K(X_G)$.

参考文献:

[1] 钟怀杰,程立新. 关于 G-M 成果研究的若干新动态Ⅰ. G-M 型空间的若干新品种[J]. 应用泛函分析学报,2002, 4(1): 60—68.

[2] Gowers W T, Maurey B. The unconditional basic sequence problem[J]. J AMS, 1993, 6(3): 851—874.

[3] 钟怀杰. Gowers-Manurey 空间及其共轭空间[J]. 科学通报,1997, 42: 14—16.

[4] 钟怀杰. 关于 Banach 空间的遗传不可分解性质和商遗传不能合成性质[J]. 数学物理学报,1997, 17: 274—279.

[5] 钟怀杰. Banach 空间结构理论的重大进展[J]. 数学进展,2000, 29(1): 1—18.

[6] Argyros S A, Felouzis V. Interpolating hereditarily indecomposable Banach spaces[J]. J AMS, 2000, 13: 243—294.

[7] Ricker J W. Well-bounded operators of tpye (B) in H. I. spaces[J]. Acta Sci Math, 1994, 59: 475—488.

[8] Ricker W J. Booleom algebras of projections and …[J]. Proc Edinburgh MS, 1997, 40: 425—435.

[9] Cheng Q. Well bounded operators on general Banach spaces[J]. Bull Austral Math Soc, 1999, 60: 337—339.

[10] Ferenczi V. Hereditarily finitely decomposable Banach spaces[J]. Studia Math, 1997, 123: 135—149.

[11] Caradus S, Pfaffenberger W, *et al*. Calkin algebras and algebrass of operators on Banach spaces[M]. New York: Marcel Dekker, INC, 1974.

[12] Kato T. Perturbation theory for linear operators[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1994.

[13] Pietsch A. Operator Idecds[M]. DVW Berlin, 1980.

[14] Lindenstranss J, Tzafriri L. Classical Banach space Ⅰ[M]. Springer-Verlag, 1977.

[15] Ferenczi V. Quotient hereditarily indecomposable Banach spaces[J]. Canad J Math, 1999, 51: 566—581.

[16] Neidinger R. Factoring operators through hereditarily l_p spaces[M]. Berlin: Springer-Verlag L N M, 1166, 1985.

[17] Benzinger H, *et al*. Spectral families of projections…[J]. Trans AMS, 1983, 275(2): 431—475.

[18] Dowson H R. Spectral Theory of linear Operators[M]. London: LMSM, 1978.

[19] Read C J. Strictly singular operators and the invariant swbspace problem[J]. Studia Math, 1999, 132(3): 203—226.

On Recent Developments in Studies of G-M's Results Ⅱ
——Operators related to G-M type spaces

ZHONG Huai-jie[1], CHENG Li-xin[2]

1. *Department of Mathematics, Fujian Normal University, Fuzhou* 350007, *China*
2. *Department of Mathematics, Xiamen University, Xiamen* 361005, *China*

Abstract: In this paper, recent developments about a series of the Gowers-Maurey's results since Gowers W. T. had wined the 98' Fields medal have been introduced. It composes of two sections, in this second section relative operators have been discussed. They include operators wich factorized through a G-M type space, operator idelas and structures of operators on a G-M type space, and the spetral theory of operators on a G-M type space.

Key words: Banach space; G-M type space; strictly singular operator; strictly cosingular operator